



## بخش اول: مسئله‌ها

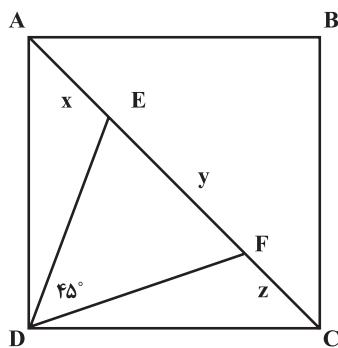
.۲۳۶. همه مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای را پیادا کنید که طول یکی از اضلاع آن برابر  $60^\circ$  باشد و طول اضلاع آن یک دنباله حسابی تشکیل دهند.

.۲۳۷. معادله لگاریتمی زیر را حل کنید:

$$\log_x^x - \log_x^{16} = \frac{7}{6} - \log_x^8$$

.۲۳۸. چند عدد ده رقمی با ارقام ۱ و ۲ می‌توان ساخت بهطوری که چهار رقم متوالی آن ۱۲۲۱ نباشد؟

.۲۳۹. در شکل ABCD یک مربع است و نقاط E و F روی قطر AC طوری انتخاب شده‌اند که:  $\angle EDF = 45^\circ$ . اگر  $AE=x$ ،  $EF=y$ ،  $FC=z$  ثابت کنید:  $FC=z$ .

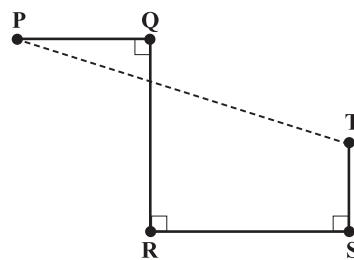


.۲۴۰. مختصات سه رأس مثلثی عبارت‌اند از  $(1, 4)$ ،  $(5, 3)$  و  $(5, 0)$ . مجموع همه مقادیر  $c$  را بیابید، بهطوری که مثلث مذکور مساحتی برابر  $14$  داشته باشد.

.۲۳۱. به ازای چه مقادیری از  $\{1, 2, \dots, 15\}$ ،  $n \in \mathbb{N}$  اول است؟

.۲۳۲. فرض کنید:  $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)f(x)$ . اگر باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای  $(f(x))^{115}$  بر  $(x^2+ax+b)$  باشد، آن‌گاه  $9a+b$  چقدر است؟

.۲۳۳. در شکل زیر  $PQ$  بر  $QR$ ،  $QR$  بر  $RS$  و  $RS$  بر  $ST$  عمود هستند. همچنین  $PQ=4$ ،  $RS=8$  و  $PT=3$ . طول  $RA$  را به دست آورید.



.۲۳۴. با فرض  $x > y > 0$  مطلوب است حاصل  $\frac{xy}{x+y} = 6$  و  $\frac{x-y}{x+y} = 9$

.۲۳۵.  $x$  و  $y$  دو عدد حقیقی هستند. کمترین مقدار عبارت زیر را بیابید:  $S=(x+3)^2+2(y-2)^2+4(x-7)^2+(y+4)^2$

## بخش دوم:

### حل مسئله‌های شماره‌های

#### قبل

حاصل عددی  $n$  رقمی است که مجموع ارقام آن برابر است با:  

$$\sum_{i=1}^n a_i$$

**۲۰۶.** همه سه تایی‌های  $(x,y,z)$  را بیابید، به طوری که:  

$$3x^3 + 3y^3 + z^3 - 2xy + 2yz = 0$$

می‌توان معادله را به صورت  $(x-y)^3 + 2x^3 + y^3 + (y+z)^3 = 0$  نوشت.  
 در نتیجه  $x=y=z=0$  تنها جواب معادله است.

**۲۰۷.** مجموع معکوسات چهار عدد طبیعی برابر است با  $1/85$ .  
 مجموع این چهار عدد را به دست آورید.

چون  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} > \frac{1}{85}$ ، پس یکی از اعداد باید  
 باشد. از طرف دیگر،  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} < \frac{1}{85}$ ، پس یکی از اعداد

هم برابر ۲ است. دو عدد دیگر  $a$  و  $c$  در نظر بگیرید. داریم:  

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{35} - \frac{1}{a}$$
 چون  $\frac{1}{c} = \frac{1}{35} - \frac{1}{b}$ ، پس یکی از جواب‌ها  
 $\{1, 2, 3, 6, 0\}$  است. اگر  $b=4$ ، آن‌گاه  $c=10$  و جواب دوم  $\{1, 2, 4, 10\}$  خواهد بود. در بقیه حالت‌ها می‌توان نشان داد که  $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$  پاره خطی است که دو نقطه  $(0, 6)$  و  $(8, 0)$  را بهم وصل می‌کند.  
 جواب ندارد ( $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \neq 0$ ) و اگر  $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 0$  آن‌گاه  $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 0$ .

**۲۰۸.** مساحت مثلثی را پیدا کنید که طول اضلاعش برابر  $5$ ،  $6$  و  $\sqrt{13}$  است.

از قضیه کسینوس‌ها داریم:

$$\begin{aligned} (\sqrt{13})^2 &= 5^2 + 6^2 - 2 \times 5 \times 6 \times \cos A \\ \text{در نتیجه } \sin A &= \frac{3}{5} \text{ و } \cos A = \frac{4}{5} \text{ و مساحت برابر است با:} \\ S &= \frac{1}{2} \times 5 \times 6 \times \sin A = 9 \end{aligned}$$

**۲۰۹.** شیب خطی را پیدا کنید که از نقاط تقاطع دو منحنی  $y=x^2$  و  $y=8-x^2$  می‌گذرد.

چون دوتابع زوج هستند، نقاط تقاطع آن‌ها نسبت به محور  $y$  ها قرینه هستند. پس شیب خطی که نقاط تقاطع را بهم وصل می‌کند، صفر است.

**۲۱۰.** از میان اعداد  $1$  تا  $21$ ، پانزده عدد به تصادف برمی‌داریم. احتمال این پیشامد را بیابید که سه عدد پشت‌سرهم انتخاب شده باشند.

اعداد  $1$  تا  $21$  را به  $7$  دسته سه‌تایی  $\{1, 2, 3\}$ ,  $\{4, 5, 6\}$ , ... و  $\{19, 20, 21\}$  افزایش می‌کنیم. می‌خواهیم  $15$  عدد از این  $7$  دسته برداریم. طبق اصل لانه کبوتر، حداقل از یک دسته باید سه عدد را برداریم. پس احتمال برداشتن سه عدد متولی برابر است با یک.

**۲۰۱.** حاصل ضرب چهار عدد طبیعی که دقیقاً سه تای آن‌ها فرد هستند، برابر  $7!$  و مجموع آن‌ها برابر است با  $63$ . بین آن‌ها بزرگ‌ترین عدد چهقدر است؟  
 عدد زوج باید تمام عامل‌های اول زوج  $7!$  را داشته باشد. پس این عدد برابر است با  $16$  یا  $48$ . با بررسی حالت‌ها به چهار عدد  $\{48, 3, 5, 7\}$  می‌رسیم که مجموعشان برابر است با  $63$ . بنابراین پاسخ  $48$  است.

**۲۰۲.** دایره  $C$  شامل نقاط  $(6, 0)$ ,  $(0, 10)$  و  $(8, 0)$  است. این دایره محور  $x$  را در چه نقطه‌ای به جز  $(8, 0)$  قطع می‌کند؟  
 مرکز دایره روی خط  $y=8$  قرار دارد، چون باید از دو نقطه  $(0, 0)$  و  $(10, 0)$  به یک فاصله باشد. از طرف دیگر، مرکز روی عمودمنصف پاره خطی است که دو نقطه  $(0, 6)$  و  $(8, 0)$  را بهم وصل می‌کند.  
 معادله این خط برابر است با:  $\frac{4}{3}x - 3 = y$ . در نتیجه مختصات مرکز برابر است با:  $(7/75, 8/75)$  و نقطه برخورد دایره با محور  $x$ ، نقطه  $(7/5, 0)$  است.

**۲۰۳.** شیب پاره خطی را بیابید که دو نقطه تقاطع منحنی‌های  $2x+3y=6$  و  $x^2+y^2=36$  چون نقاط تقاطع روی خط  $2x+3y=6$  هستند. پس پاره خط بر این خط منطبق است و شیب آن برابر است با:  $m = -\frac{2}{3}$ .

**۲۰۴.** چند عدد کوچک‌تر از یک میلیون وجود دارد که ارقام آن یکسان و مضرب  $9$  است؟  
 فرض کنید عدد  $a$ ,  $n$  رقم یکسان مانند  $d$  داشته باشد.  $a$  مضرب  $9$  است، اگر و تنها اگر  $nd$  مضرب  $9$  باشد. چون:  $1 \leq n \leq 6$ ، پس  $d$  تنها می‌تواند  $3$ ,  $6$  و یا  $9$  باشد. اگر  $d=3$ , دو عدد  $333$  و  $333333$  مطلوب هستند. اگر  $d=6$ , دو عدد  $666$  و  $666666$  مطلوب هستند و اگر  $d=9$ , عدد  $999999$  به دست می‌آیند. پس در مجموع  $10$  عدد با شرایط فوق داریم.

**۲۰۵.** مجموع ارقام عدد  $N = \frac{10^n + 2}{3}$  را بحسب  $n$  به دست آورید ( $n \in \mathbb{N}$ ).  

$$N = \frac{10^n + 2}{3} = \frac{10^n - 1}{3} + 1 = \overbrace{\dots}^{n \text{ بار}} + 1 = \overbrace{\dots}^{n \text{ بار}}$$